PREMIÈRE COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES (M')

(Durée : 4 heures)

***

Première partie

Dans cette première partie, on désigne par α un entier ≥ 2 et par β un réel > 1.

1. a) Vérifier que la formule

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos(2\pi\alpha^n x)}{\beta^n}$$

définit une fonction continue périodique de période 1.

b) Montrer que f est de classe C^k pour tout entier $k < \dfrac{\ell n\, \beta}{\ell n\, \alpha}$.

2. Calculer les coefficients de Fourier de f.

3. Démontrer la réciproque de **1.b)**.

Dans toute la suite on désigne par (e_1, e_2) la base naturelle de l'espace vectoriel $\mathbf{R}^2$, par x_1 et x_2 les coordonnées d'un vecteur x de $\mathbf{R}^2$, par $\mathbf{Z}^2$ le sous-ensemble de $\mathbf{R}^2$ formé des vecteurs à coordonnées entières ; enfin par C^k_{per}, pour k entier positif ou nul, l'espace des fonctions f sur $\mathbf{R}^2$, à valeurs complexes, de classe C^k et vérifiant $f(x+p) = f(x)$ pour tout x dans $\mathbf{R}^2$ et tout p dans $\mathbf{Z}^2$.

Deuxième partie

On désigne par G le groupe des transformations A de $\mathbf{R}^2$, linéaires, bijectives et vérifiant $A(\mathbf{Z}^2) \subset \mathbf{Z}^2$ et $A^{-1}(\mathbf{Z}^2) \subset \mathbf{Z}^2$; puis par G_0 le sous-groupe de G formé des transformations de déterminant 1.

4. Caractériser les matrices représentant les éléments de G_0 dans la base (e_1, e_2).

5. Quelles sont les valeurs prises par $\det A$ lorsque A parcourt G ?

6. Etant donné un élément A de G_0 vérifiant $|\mathrm{tr}\ A| > 2$ (où $\mathrm{tr}\ A$ désigne la trace de A), que peut-on dire des valeurs propres de A ?

Troisième partie

Aucune difficulté théorique ne sera soulevée à propos de la notion d'intégrale double.

Pour tout vecteur $p = (p_1, p_2)$ de $\mathbf{Z}^2$ on note Δ_p le sous-ensemble $[p_1, p_1 + 1[\times [p_2, p_2 + 1[$ de $\mathbf{R}^2$. On fixe un élément A de G_0 et on se propose de démontrer la relation

$$(1) \qquad \iint_{\Delta_0} f(x_1, x_2)dx_1dx_2 = \iint_{A(\Delta_0)} f(x_1, x_2)dx_1dx_2$$

pour toute fonction $f \in C^0_{per}$.

Pour tout $p \in \mathbf{Z}^2$ on pose $U_p = \Delta_p \cap A(\Delta_0)$ et $T_p = U_p - p$ (ensemble des éléments $x - p$ où $x \in U_p$).

7. Déterminer et représenter graphiquement les ensembles U_p et T_p dans le cas où A correspond à la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

8. Vérifier que $A(\Delta_0)$ et Δ_0 sont respectivement réunions disjointes des ensembles U_p et T_p.

9. Démontrer la relation (1).

Quatrième partie

Dans toute la suite du problème on fixe un élément A de G_0 tel que $|\mathrm{tr}\, A| > 2$, un nombre réel $b > 1$, une fonction φ de classe C^∞ appartenant à C^0_{per}, et on se propose d'étudier les fonctions $\psi \in C^0_{per}$ satisfaisant l'équation

$$(2) \qquad b\psi - \psi \circ A = \varphi\,.$$

On note a la valeur propre de A vérifiant $|a| > 1$.

10. Vérifier que la formule

$$\psi = \sum_{n=0}^{\infty} b^{-n-1} \varphi \circ A^n$$

définit un élément de C^0_{per} solution de (2).

11. Etudier l'unicité de la solution de (2) dans C^0_{per}.

12. Montrer que ψ est de classe C^k pour tout $k < \dfrac{\ell n\, b}{\ell n |a|}$.

[On pourra introduire une base de $\mathbf{R}^2$ diagonalisant A]

Cinquième partie

Pour toute fonction f de C^0_{per} on définit une fonction complexe $\hat{f}$ sur $\mathbf{Z}^2$ par

$$\hat{f}(p_1,p_2)=\int\!\!\int_{\Delta_0} f(x_1,x_2)\exp(-2\pi i(p_1x_1+p_2x_2))dx_1dx_2\ .$$

On admettra que, pour toute partie finie X de $\mathbf{Z}^2$, on a

$$\sum_{(p_1,p_2)\in X}|\hat{f}(p_1,p_2)|^2\le\int\!\!\int_{\Delta_0}|f(x_1,x_2)|^2dx_1dx_2\ .$$

13. Démontrer la relation

$$\widehat{f\circ A}=\hat{f}\circ D$$

où D est l'inverse de l'adjoint de A pour le produit scalaire usuel de $\mathbf{R}^2$.

On définit la fonction ψ comme au **10.**, *en supposant en outre que* $\varphi(x_1,x_2)=\cos 2\pi x_1$.

14. Calculer $\hat{\varphi}$, puis $\hat{\psi}(D^{-n}(e_1))$ lorsque n est un entier positif ou nul.

15. Soit k_1 et k_2 deux entiers positifs ou nuls. Montrer que la somme

$$\sum_{n=0}^{\infty}(D^{-n}(e_1)_1)^{2k_1}(D^{-n}(e_1)_2)^{2k_2}|\hat{\psi}(D^{-n}(e_1))|^2$$

(où $D^{-n}(e_1)_1$ et $D^{-n}(e_1)_2$ désignent les deux composantes de $D^{-n}(e_1)$) est finie si et seulement si $k_1+k_2<\dfrac{\ell n\, b}{\ell n|a|}$.

[On pourra introduire une base de $\mathbf{R}^2$ diagonalisant D]

16. Pour quels entiers k la fonction ψ est-elle de classe C^k ?